COMMISSIONE INTERNAZIONALE DELL'INSEGNAMENTO MATEMATICO

Atti della Sottocommissione italiana

Osservazioni e proposte circa l'insegnamento della matematica nelle scuole elementari, medie e di magistero

RELAZIONE

DI

A. PADOA

Prof. nel R. Istituto Tecnico di Genova



ROMA
COOPERATIVA TIPOGRAFICA MANUZIO
Via di Porta Salaria, 23-B

1912

Osservazioni e proposte circa l'insegnamento della matematica nelle scuole elementari, medie e di magistero [1]

RELAZIONE

di A. PADOA, Prof. nel R. Istituto Tecnico di Genova

Accade sovente che le associazioni di insegnanti non diano, alla soluzione di questioni prettamente scolastiche, quel contributo che parrebbe legittimo attenderne; forse perchè la maggior parte di essi, dimenticando esser la scuola l'organo di una funzione sociale, finiscono col non vedervi altro che un gruppo eterogeneo di insegnamenti, sempre in gara a contendersi un apparente primato.

Ed invero, nelle controversie circa la necessità o la estensione (e la conseguente durata e frequenza) di un insegnamento in una determinata scuola, sovente, anzichè un alto e meditato criterio dell'utile sociale, predomina uno spirito di combattività così miope e indiscreto da sembrar quasi meschinamente interessato: mentre, il più delle volte, è invece l'espressione ingenua di una unilateralità ormai irriducibile e della persuasione fallace che la dignità di una disciplina dipenda dall'ampiezza del posto che i suoi fautori riescono a procacciarle in ogni ordine di scuole, anzichè dal suo valore intrinseco e dall'importanza dei vincoli che la legano agli altri rami dello scibile.

E perciò — ritenendo in particolare che i cultori di matematica debbano esplicare il loro amore alla più pura fra le scienze in altro modo che non sia quello di imporla senza discrezione ad

(1) Questo articolo fu già pubblicato nel *Bollettino di Matematica*, Anno IX (1910).

ogni categoria di alunni, così da destare contro di lei l'ostilità di chi non possiede nè preparazione nè attitudini a penetrarne l'intima essenza e di chi non sente alcun desiderio di estendere la propria coltura più che non richieda una forma prestabilita di attività sociale — mi propongo di esaminare, a larghi tratti, i criterî che, a parer mio, dovrebbero presiedere alla determinazione del programma e alla scelta del metodo per l'insegnamento della matematica nei varî ordini di scuole, *subordinatamente* al fine di ciascuna di esse.

1. — Anzitutto, quando due scuole siano collegate in modo che l'una debba servire di preparazione all'altra, sono i professori della seconda che dovrebbero essere chiamati a stabilire il programma minimo da svolgersi nella prima; e da questo minimo non si dovrebbe scostarsi per le discipline che avranno più ampio sviluppo nella seconda (1).

Ad esempio, benchè io non abbia insegnato nelle *scuole elemetari*, mi ritengo più competente di un maestro a pronunciarmi circa la estensione da darsi al programma di matematica nella scuola elementare; e ciò per aver avuto occasione di insegnare in ciascuna (una sarebbe bastata per tale esperienza) delle scuole successive ad essa (ginnasio, scuola tecnica e complementare).

Orbene, io ricordo di avere dovuto fare due constatazioni altrettanto spiacevoli: la maggior parte dei miei piccoli alunni non sapeva eseguire con *sicurezza* e *rapidità* le quattro operazioni coi numeri *interi*, ma pretendeva di aver già imparato gran parte di quanto io doveva spiegar loro di *aritmetica* e di *geometria*.

Ora, quasi sempre, chi non venne addestrato per tempo al conteggio, non vi si addestra mai più; e chi ha sfiorato cento nozioni, senza approfondirne alcuna, ha minor desiderio di sapere e presta quindi svogliata e saltuaria attenzione; così troppi finiscono con l'uscire dalla scuola media nè migliori calcolatori nè migliori ragionatori che non vi siano entrati.

Io non esiterei quindi a bandire completamente la *geometria* dal-

(1) Il che non esclude, ma anzi implica, che nella prima scuola siano impartiti altri insegnamenti, da considerarsi completi in sè rispetto a quel determinato ordine di studi. Ad es., ancorchè non ci si occupi di lettere nella Facoltà matematica, nè di matematica nella Facoltà letteraria, nessuno può negar la necessità che nella scuola media venga insegnato lettere a chi frequenterà la prima e matematica a chi frequenterà la seconda; ma entro i confini delle effettive esigenze di una coltura generale e di un armonico sviluppo delle facoltà intellettuali.

l'insegnamento elementare, il *disegno* su carta quadrettata sembrandomi sufficiente a sviluppare l'intuizione geometrica ed a fornire occasione di apprendere i primi rudimenti del linguaggio geometrico.

E con la geometria bandirei pure ogni trattazione generale del *sistema metrico*, ricorrendo tuttavia nei problemi (di cui dirò più innanzi) a misure di *lunghezza*, di *peso* e di *valore* (ma non a quelle di *area* e di *volume*).

Quanto all'*aritmetica*, bisogna che gli alunni siano chiamati con la maggior frequenza possibile ad eseguire alla lavagna le quattro operazioni coi numeri *interi;* ed anche coi numeri *decimali*, sovratutto perchè è un altro modo per esercitarli nelle operazioni coi numeri interi e poi perchè i numeri decimali sono di uso continuo nelle accennate misure di lunghezza, di peso e di valore. Per contro, mi sembra che le *frazioni* possano venir completamente differite.

Inoltre, sin da principio, ma gradualmente, giova addestrare i bimbi ai facili e piacevoli artifici del *calcolo mentale*, per distoglierli dal ricorrere al conteggio scritto quando non ne valga la pena; ma senza eccedere, così da non ingenerare mai stanchezza o smarrimento (1).

Quanto ai *problemi*, bisogna convincere i maestri elementari che è proprio e soltanto alla loro scelta inopportuna che son dovuti i primi scoraggiamenti dei giovani nel campo matematico: primi scoraggiamenti dai quali pochi si risollevano, mentre i più vi si adagiano pigramente, confortati dalla compassione dei parenti (2).

Quindi, per lungo tempo, si dovrebbero proporre soltanto problemi che richiedano una sola operazione (ma non sempre la medesima), finchè tutti non abbiano appreso a decidere istantaneamente quale operazione debba adoperarsi in ciascuno dei varî casi considerati; per passare poi gradualmente a problemi richiedenti due, tre (e non più operazioni).

E vieterei nella scuola elementare ogni *formola* (del tre sem-

---

(1) Ad es., non più di così:

$$35 \times 16 = (35 \times 2) \times 8 = 70 \times 8 = 560,$$
$$37 \times 19 = 37 \times (20 - 1) = 37 \times 20 - 37 = 740 - 37 = 703.$$

(2) E persino dalla voce autorevole di Ministri che, a proposito dell'insegnamento della matematica nel liceo, hanno proclamato e tutelato pretese *idiosincrasie*. Certo è però, intanto, che la scuola elementare deve proporsi di riuscire accessibile in ogni disciplina a *tutti*, fuorchè ai bimbi che abbiano una deficienza intellettuale veramente *patologica*.

plice o composta, di interesse, ecc.), perchè tali formole fanno dei bimbi altrettanti automi, esonerandoli dall'esercizio veramente utile di *pensare* caso per caso.

Infine, i *lavori domestici* devono tenere esercitati gli alunni senza alcuno sforzo; e perciò siano frequenti, brevissimi e facilissimi (semplici ripetizioni, con altri numeri, di esercizi e problemi già risolti alla lavagna), così da non essere più il primo incitamento a frodi moralmente e intellettualmente funeste.

2. — Non mi preoccupa la obbiezione che in tal modo si impoverirebbe la preparazione matematica di coloro — e sono il maggior numero — che, dopo la scuola elementare, non imprenderanno un corso completo di studi; e ciò per due ragioni.

Anzitutto, non mi parrebbe ragionevole pretendere da questi più di quanto si possa utilmente dagli altri. Inoltre, è convinzione ormai diffusa che, in ogni modo, l'antica breve scuola elementare sia insufficiente così a dare una durevole coltura, per quanto rudimentale, come ad avviare, con fondata lusinga di buoni risultati, alle più umili manifestazioni di attività agricola, industriale o commerciale. La quale convinzione trova già una prima esplicazione nel protrarsi dell'insegnamento elementare per coloro che non possono aspirare a scuole superiori; e credo l'avrà più proficuo nell'istituzione di scuole professionali inferiori variamente specializzate, che integrino la vera *scuola elementare* — comune a tutti — sfollando efficacemente le scuole medie, e cioè sin dal loro inizio.

Ora, subordinatamente al fine ed alla durata di ciascuna di tali scuole, parmi non sarà difficile determinare il programma complementare di matematica che vi dovrà essere svolto; e credo che l'insegnante non avrà per nulla a dolersi se — venendo attuata la riforma che io propongo per la scuola elementare [1] — troverà negli alunni meno estesa ma più sicura preparazione, e meno diffusa la umiliante e snervante accettazione della propria insufficienza intellettuale.

3. — L'insegnamento della matematica nella *scuola media* (sfollata come ho detto mediante scuole professionali inferiori [2] e considerata quindi esclusivamente quale anello di congiunzione fra la scuola elementare e le facoltà universitarie o le scuole professionali superiori (1) (parmi debba svolgersi in *tre corsi* successivi (*preparatorio*, *deduttivo*, *complementare*), ben collegati ma netta-

---

(1) Più innanzi accennerò brevemente anche a *scuole professionali medie* [9].

mente distinti; dei quali *i primi due* (triennali ciascuno) dovrebbero essere comuni a tutte le eventuali suddivisioni che si ritenessero opportune nella scuola media per altre ragioni, mentre *il terzo* dovrebb'essere vario di contenuto e di durata, conforme alle accennate suddivisioni.

Incomincio ad esporre le mie vedute circa il corso *deduttivo* perchè, dovendo esso formare il nòcciolo della coltura matematica generale, soltanto dalle sue effettive *esigenze* si deve trar norma nello stabilire programmi e metodo per il corso *preparatorio*; e, soltanto dopo avergli assegnato *estensione* e *profondità* ragionevoli, come insegnamento comune, risulterà quali parti si debbano differire al corso *complementare*.

4. — All'*Aritmetica* ed all'*Algebra* nel corso *deduttivo* [3] assegnerei il seguente programma.

I anno. — Completa trattazione deduttiva delle proprietà generali delle varie specie di numeri (dal numero naturale assoluto al numero razionale relativo) e delle loro operazioni fondamentali. Numerosi esercizi, lentamente graduati, di calcolo letterale.

Nota. — Essendo ragionevole preoccuparsi di rendere sempre possibile prima la sottrazione e poi la divisione, procederei in quest'ordine: numeri naturali assoluti, numeri naturali relativi, numeri razionali assoluti e relativi. Per ciascuna specie di numeri tratterei dapprima soltanto delle prime quattro operazioni fondamentali, parlando da ultimo (e quindi una sol volta) della potenza a base razionale relativa e ad esponente intero e relativo.

Dal confronto col programma del II anno risulterà che nel I, pur usandone negli esercizi, non devono essere giustificati i procedimenti pratici per la esecuzione delle prime quattro operazioni, nonchè per la ricerca del massimo divisore e del minimo multiplo; che nella trattazione teorica la divisione va considerata soltanto quale operazione inversa della moltiplicazione; e che dal calcolo letterale è esclusa la divisione dei polinomi, mentre vi sono incluse le operazioni con le frazioni, le più ovvie semplificazioni, il quadrato di un polinomio e il cubo di un binomio.

II anno. — Della divisione di seconda specie (determinatrice di quoziente e resto) eseguita con numeri interi assoluti o con polinomi ordinabili secondo le potenze decrescenti (soltanto) di una sola lettera. Casi di divisibilità di $x^m \pm a^m$ per $x \pm a$. Quoziente e resto della divisione di un polinomio qualunque per $x \pm a$. I numeri naturali considerati quali polinomi; giustificazione dei procedimenti pratici per la esecuzione delle quattro operazioni fonda-

mentali; cambiamento di base. Criterî di divisibilità dipendenti dal sistema di numerazione. Cenno sui numeri primi. Teoria del massimo divisore e del minimo multiplo con ambo i metodi.

Risoluzione di una equazione di primo grado ad un'incognita e di un sistema determinato di equazioni di primo grado.

Nota. — Esclusa l'affaticante ed oziosa introduzione all'Algebra (1), una opportuna scelta di varî e ben graduati esercizi e problemi dovrà rendere attraente e piacevole sovratutte questa parte della Matematica (2).

III anno. — Numeri decimali e loro generatrici (3). Chiari ma brevi cenni della teoria dei numeri *irrazionali* e fuggevole accenno ai *numeri complessi*. Estrazione di radice quadrata con data approssimazione. Calcolo dei radicali.

Teoria completa dell'equazione di *secondo grado* ad un'incognita. Risoluzione di un sistema determinato di equazioni tutte di primo grado fuorchè una di secondo. Esercizi, problemi, applicazioni dell'Algebra alla Geometria.

5. — A ben guardare, questo programma *aritmetico-algebrico* destinato al corso *deduttivo* della scuola media, esige più maturità intellettuale (e per questo non potrebbe anteciparsi senza danno)

---

(1) Forse che non si opera su un'*equazione* come su un'*identità*, ed altrettanto legittimamente, quando a ciascuna equazione si supponga premessa una volta per tutte la frase: « supposto che x sia un numero (nel più ampio significato che tale parola ha per l'alunno) tale che... »? La equivalenza delle equazioni successivamente trovate non è conseguenza della *invertibilità* delle operazioni eseguite sui due membri di ciascuna? (essendo escluse le equazioni che richiedano elevazione a potenza e giovando differire le equazioni che contengano l'incognita in qualche denominatore, per le quali si daranno a suo tempo gli opportuni avvertimenti).

Analoghe osservazioni valgono per i *sistemi di equazioni*.

(2) Nell'*Università popolare* di Roma tenni per due anni (1901, 1902) un corso di *Matematica elementare*, al quale riuscii ad attrarre e conservare un pubblico numeroso e varissimo per età e preparazione, occupandomi fin dalla prima lezione della risoluzione algebrica di problemi scelti e graduati in modo da riuscire con essi a svolgere tutto il programma aritmetico-algebrico che mi ero prestabilito, non insegnando alcuna regola prima che ne fosse avvertito il bisogno o l'utilità. Credo che questo metodo potrebbe usarsi utilmente anche in alcune scuole *serali* e *professionali*.

(3) Comunemente, le generatrici dei numeri decimali periodici vengono determinate o operando su di essi come sui numeri decimali finiti, senza curarsi di legittimare tale procedimento (e quindi con difetto di rigore) ovvero ricorrendo alla teoria dei limiti (e quindi con difetto di semplicità). Il metodo ch'io uso seguire parmi evitare i due inconvenienti, conciliando la semplicità e il rigore; ne farò forse argomento di una breve comunicazione alla *Mathesis*.

che speciale preparazione. Anzi, io reputo *vanamente uggiosa* la ripetizione (che ora si fa nel prim'anno di ogni scuola media inferiore) delle operazioni fondamentali coi numeri *interi* e tale da scemare poi l'efficacia della loro trattazione deduttiva [4] (1); e, per analoga ragione, *dannosa*, più che inutile, ogni antecipazione di *calcolo letterale* e di *algebra* (come ora si fa nel terzo anno della scuola tecnica, perchè fine a sè stessa oltre che preparatrice all'istituto tecnico).

Ma, poichè bisogna pure impiegare in qualche modo quel triennio che intercede fra la scuola elementare e il secondo periodo d'insegnamento medio, se ne approfitti per addestrare i giovani nel conteggio aritmetico (nel quale gli alunni meno pronti non avrebbero tempo per indugiare abbastanza nel secondo periodo) in *prosecuzione* a quanto hanno appreso nella scuola elementare per i numeri *interi* e *decimali* [1], insistendovi finchè ogni nuova operazione sia eseguita con *sicurezza* e *rapidità*.

Ecco uno schema di programma per il corso *preparatorio di Aritmetica*, da svolgersi unicamente con *esercizi* e poi con numerosi e facili problemi.

I anno. — Regole pratiche di divisibilità per 2, 4, 5, 25, 3, 9, 11. Cenno sui numeri primi. Ricerca del massimo divisore di due numeri, col metodo delle successive divisioni o con la decomposizione in fattori primi (da farsi poi mentalmente per numeri opportunamente scelti). Semplificazioni successive di una frazione e sua riduzione ai minimi termini. Trasformazione di frazione impropria in numero misto e viceversa. Ricerca del comune multiplo di due o di parecchi numeri, con entrambi i metodi. Somma di quante si vogliano frazioni. Differenza di due frazioni. Prodotto e quoto di frazione per intero (2).

II anno. — Trasformazione di una frazione in decimale con data approssimazione. Previsione della specie di decimale generato da una frazione data. Frazione generatrice di un dato decimale (finito, periodico semplice o misto). Estrazione di radice quadrata

---

(1) Al qual proposito veggasi quanto molto saggiamente dice la professoressa Bisson Minio nella Relazione, da lei presentata al Congresso di Padova, circa le *Riforme e ritocchi dei programmi scolastici* (Scuola complementare e normale), da pag. 7, linea 4, dal basso a pag. 8, linea 23.

(2) Le *frazioni* verranno introdotte quali *simboli operatori* applicate a grandezze e più specialmente a *segmenti*; quindi è sufficiente apprendere a determinarne multipli e summultipli (secondo numeri interi).

da un intero quadrato di intero, da un intero qualunque o numero decimale con approssimazione data, da una frazione trasformata anzitutto in decimale. Proporzioni con interi, decimali, frazioni; ricerca del quarto, del terzo, del medio proporzionale.

III anno. — Numeri interi relativi (positivi e negativi), usati dapprima a determinare la posizione di punti di una retta data, rispetto ad un punto di origine, ad un segmento unitario ed alla scelta del verso positivo della retta. Applicazioni al termometro, alla cronologia, ai debiti e crediti, alle vincite e perdite, ecc. Somma di due numeri relativi della stessa specie, opposti, di specie e valore diversi. Affinchè la sottrazione sia ancora l'operazione inversa dell'addizione, la differenza fra due numeri relativi è la somma del primo con l'opposto del secondo.

Uso delle lettere per esprimere con formole generali le proprietà e regole già apprese in tutto il corso di aritmetica pratica.

Nota. — L'introduzione dei numeri relativi viene attualmente differita al liceo; ma, a chi ben guardi, l'addizione e la sottrazione con gl'interi relativi sono più facili delle analoghe operazioni con le frazioni assolute; pertanto, l'addestrare gli alunni ad eseguire queste due sole operazioni coi numeri relativi non mi sembra dover presentare alcuna difficoltà.

Così il III anno del corso *preparatorio* riuscirà immediatamente collegato al I anno del corso *deduttivo* [4]; e tale coordinazione diverrà anche più intima mediante l'ultima parte del programma proposto, che consente di famigliarizzare gli alunni all'*ufficio rappresentativo* delle *lettere,* senza per questo iniziare il *calcolo letterale* riserbato al secondo periodo. Si tratta cioè soltanto di far intendere che ad es. le formole $a + b = b + a$, $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$ rappresentano, con maggior concisione, evidenza ed universalità, proprietà e regole già note agli alunni.

In tutto questo triennio, l'insegnante non deve dare alcuna *dimostrazione deduttiva,* ma soltanto *spiegazioni intuitive ed analogiche,* che gli alunni non dovranno ripetere; essi devono soltanto eseguire esercizi, ripetere regole e risolvere problemi.

Ordinato e svolto così il programma *aritmetico* del *primo* periodo, mi sembra esso debba riuscire la più efficace preparazione al programma *aritmetico-algebrico* del *secondo* [4], poichè la scolaresca, non più impacciata nell'eseguir le operazioni, potrà rivolgere tutta la propria attenzione all'armonico sviluppo di una trattazione deduttiva.

6. — Ma ben più si scostano dalla tradizione le mie vedute circa il programma *geometrico* e perciò mi trovo costretto a chiarirle un po' più diffusamente.

Indipendentemente da ogni questione sottile circa il concetto di movimento, l'impenetrabilità della materia si oppone al suo impiego effettivo quale mezzo di prova dell'eguaglianza geometrica di due corpi; cosicchè, ad esempio, lo scalpellino, che deve cavare dal marmo una statua eguale al bozzetto modellato dall'artista, non può far altro che imaginar stabilita una corrispondenza biunivoca fra i punti superficiali del modello e della statua appena sbozzata, per verificare, mediante il compasso di spessore, se le coppie di punti corrispondenti risultino sovrapponibili, e lavorar di scalpello sino a raggiungere tale intento (1).

Ora, prescindendo dalle cause di errore per cui a ciascuna verifica non può attribuirsi che un valore approssimato, tale sarà pur sempre il valore complessivo delle varie constatazioni, per il fatto ch'esse non potranno esercitarsi che su un numero finito, per quanto grande, di punti, mentre rimarrà affidato direttamente alla percezione visiva ogni controllo circa l'accennata corrispondenza per altri innumerevoli punti.

Ecco perchè nella Geometria elementare si considerano soltanto figure (e non tutte) i cui punti, pur potendo essere innumerevoli, siano collegati a gruppi finiti di punti (appartenenti o no alla figura stessa) mediante leggi varie ma precise, a ciascuna delle quali corrisponde una determinata categoria di figure. Le categorie di figure a cui più frequentemente si ricorre sono contraddistinte con nomi comuni, i quali perdono il significato un po' vago che loro proviene dall'origine etimologica o che loro conferisce l'uso volgare, per divenire espressione convenzionale della legge accennata.

Questo punto di vista — mentre pone in chiara luce il valore e l'importanza delle definizioni geometriche (in quanto due figure risultano eguali sol quando hanno lo stesso nome ed hanno eguali i gruppi finiti di punti che le determinano) — indica quale unico sistema accettabile di definizioni geometriche quello in cui, oltre

---

(1) La relazione considerata comprende tanto la *sovrapponibilità* (comunemente detta *eguaglianza*) quanto la *simmetria* rispetto ad un piano; ora dapprima giova appunto differire la distinzione fra queste due relazioni e designarle simultaneamente con una sola locuzione, che potrebb'essere ad esempio « F' *è un'imagine di* F ». Chiarito questo punto, uso la solita frase « è eguale a » col significato che ho dato ora alla frase « è una imagine di ».

ai *punti*, non viene assunta quale primitiva (non definita) alcuna altra figura (retta, piano, segmento, ecc., per le quali appunto, nelle trattazioni comuni, urge *postulare* la loro determinazione mediante un numero finito di punti), ma soltanto *la relazione di eguaglianza fra coppie di punti*, cui — presto o tardi, esplicitamente o no — è pur d'uopo ricorrere: sistema di cui sin dal 1900 ho dimostrato la sufficienza (1) e che ha già avuto notevoli sviluppi nelle più recenti memorie sui fondamenti della geometria del Peano, di Levi Beppo e del Pieri (2).

Certo che il metodo accennato non può attuarsi senza sconvolgere l'ordine espositivo tradizionale; ma, se come a me sembra, questo, messo a raffronto col nuovo non può addurre a sua difesa che il diritto del primo occupante, è inevitabile la trasformazione di cui dò qualche breve cenno.

Ad es., « l'eguaglianza di due triangoli aventi i lati rispettivamente eguali » che costituisce un teorema faticosamente dimostrato, diverrà l'applicazione immediata del criterio generale di eguaglianza a due tripunti (3); « l'eguaglianza di due triangoli aventi rispetti-

---

(1) *Un nouveau système de définitions pour la géométrie euclidienne* (Deuxième Congrès int. des Mathématiciens - Paris).

La mia proposizione VI definisce il *movimento* e consentirebbe quindi subito la distinzione accennata fra *sovrapponibilità* e *simmetria*.

(2) G. PEANO, *La Geometria fondata sulle idee di punto e distanza* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1902).

B. LEVI, *Fondamenti della metrica proiettiva* (Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1904).

M. PIERI, *La geometria elementare istituita sulle nozioni di punto e sfera* (Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1908).

(3) Il dire che A, B, C è un *tripunto* significa: A e B sono punti distinti (la *distinzione* è negazione di *coincidenza*, cioè di *eguaglianza logica*) e si può determinare un punto C', distinto da C, tale che le coppie AC' e BC' siano rispettivamente sovrapponibili ad AC e BC.

Il dire che A, B, C, D è un *quadripunto* significa: A, B, C, D è un tripunto e si può determinare un punto D', distinto da D, tale che le coppie AD', BD', CD' siano rispettivamente sovrapponibili ad AD, BD, CD.

Se A, B sono punti distinti, *retta* AB significa l'insieme dei punti X tali che A, B, X non sia un tripunto, tali cioè che non esista alcun punto X' distinto da X per cui le coppie AX' e BX' risultino sovrapponibili ad AX e BX.

Se A, B, C è un tripunto, *piano* ABC significa l'insieme dei punti X tali che A, B, C, X non sia un quadripunto, tali cioè, ecc., ecc.

Non conoscevo nel 1900, ed appresi poi compiacendomene, la definizione di Leibniz: « *Haec plani definitio mihi est, ut sic locus omnium punctorum sui ad tria puncta in eandem rectam non cadentia sitos unicorum* » (*Char. Geom.*, Math. Schr., t. V, p. 189, anno 1679).

vamente eguali due lati e l'angolo compreso » sarà un corollario dell'applicazione del medesimo criterio agli angoli, considerati semplicemente quali coppie di semirette uscenti da uno stesso punto; per i quali angoli, invece, diverrà importante il dimostrare che « se — dopo aver segnato su ciascun lato di un angolo, a partir dall'origine, un segmento arbitrario e sui lati di un altro angolo segmenti rispettivamente eguali ai primi — risultano eguali i segmenti di chiusa, ciò deve accadere comunque vari la scelta dei segmenti sui lati del primo angolo » (1); ecc.

E quanto ai *postulati* acquistano importanza preponderante i seguenti:

1) « se f ed f' sono figure eguali e se ad f si associa un punto X non appartenente ad essa, è sempre possibile associare ad f' un punto X', in guisa che le nuove figure siano eguali »;

2) « esiste almeno un quadripunto »:

3) « dato un quadripunto, non è possibile associargli separatamente due punti distinti, in guisa da ottenere due gruppi ordinatamente eguali » (2);

postulati molto diversi e ben altrimenti fecondi dei consueti, il cui numero grandissimo apparirebbe anche maggiore se parecchi di essi non fossero dissimulati nelle osservazioni empiriche e non s'infiltrassero di soppiatto nelle dimostrazioni, mediante il ricorso all'intuizione della figura.

7. — Per dare agl'insegnanti, che la desiderano, la *possibilità* di sperimentare questo metodo — *fusionista* per necessità — che è meno arido e formalista che a prima giunta non sembri, scostandosi anzi meno di quello consueto dai dati dell'intuizione e riuscendo quindi più accessibile alla verifica sperimentale ed alle applicazioni veramente pratiche, si richiede che all'antica separazione della *planimetria* dalla *stereometria* venga sostituita una partizione della Geometria secondo le varie *relazioni* che intercedono tra le figure (3).

---

(1) Questa proposizione si trova dimostrata nella mia Nota, inserita nel Num. 4-5-6, anno 1910, del Bollettino della *Mathesis* col titolo: *Alcune considerazioni di Geometria elementare*.

(2) Il primo dei quali enuncia in forma deduttivamente feconda il fatto cui vagamente si accenna dicendo che lo spazio è *omogeneo, ovunque accessibile*, ecc.; il secondo ed il terzo caratterizzano la *tridimensionalità* (non meno e non più) dello spazio. Non occorre soggiungere che essi non sono i soli postulati necessari.

(3) Mi sembra notevole il fatto che in questo, con diversi se non opposti intendimenti, il collega Perna (*anti-fusionista* dichiarato) ed io ci troviamo perfettamente d'accordo (vedi pag. 17 della Relazione, da lui presentata al recente Congresso di Padova, *Sui programmi di matematica negli istituti tecnici*).

Pertanto, ecco il *sommario* del programma *geometrico* che proporrei per il corso *deduttivo*.

I anno. — Concetto di eguaglianza geometrica. — Idee primitive. Definizioni. Postulati. Loro conseguenze deduttive. — Condizioni di eguaglianza. Mutue relazioni di posizione (perpendicolarità e parallelismo di rette e di piani, punti comuni a rette e circonferenze, a piani e superficie sferiche, ecc.). — Costruzioni geometriche fondamentali (1). Proprietà di triangoli e triedri, di parallelogrammi e parallelopipedi, di poligoni e poliedri regolari (2).

II anno. — Teoria dell'equivalenza dei poligoni e poliedri.

Teoria euclidea delle proporzioni fra grandezze.

Concetto generale di similitudine, con particolare riguardo ai poligoni e poliedri (3).

Trasformazione reciproca di una proporzione fra segmenti in un'equivalenza di rettangoli; duplice enunciato di parecchie proposizioni (relative all'altezza corrispondente all'ipotenusa o alle corde e secanti e tangenti, ecc.) dimostrandone alcune mediante l'equivalenza ed altre mediante la similitudine.

III Anno. — Definizione di lunghezza di una circonferenza, di superficie laterale di un cilindro o di un cono, di area di un cerchio, di volume di un cilindro o di un cono, — come grandezze interposte fra coppie di classi contigue (dei perimetri di poligoni inscritti e circoscritti, ecc.).

Superficie e volume della sfera.

Teoria della misura; sue applicazioni planimetriche e stereometriche.

Le funzioni goniometriche seno, coseno e tangente degli angoli convessi; le identità $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$ e $sen\,\alpha : cos\,\alpha = tg\,\alpha$; relazioni

---

(1) Le ricerche circa la *sufficienza* degli stromenti fondamentali (riga e compasso) o sussidiari (squadra, riga graduata o a due orli, ecc.) a risolvere una data questione geometrica sono molto attraenti, ma soltanto per intelletti maturi; perciò credo inutile, e quindi dannoso, il parlarne nella scuola media; in cui — conforme al carattere essenziale della Geometria elementare — parmi debba essere consentito in ogni caso l'uso promiscuo ma esclusivo, della riga e del compasso.

(2) Chiamato regolare un poliedro quando le sue faccie siano poligoni regolari d'egual numero di lati e siano raggruppate in egual numero attorno ad ogni vertice, la presentazione dei modelli delle 5 specie di poliedri regolari può dispensare dal dimostrarne la *esistenza*, mentre è più importante e più agevole dimostrare la *non esistenza* di altre specie.

(3) Il concetto generale di *equivalenza* tra figure piane e solide presenta notevoli difficoltà; non così il concetto generale di *similitudine*, che risulta perfettamente analogo a quello di *eguaglianza*.

trigonometriche nel triangolo rettangolo e proporzionalità dei seni ai lati opposti in un triangolo qualunque.

8 (4). — Poichè questo corso *deduttivo* di matematica dovrebbe essere *comune* a tutte le eventuali suddivisioni della scuola media [3], è necessario anzitutto ben proporzionare l'ampiezza di sviluppo da darsi a ciascuna parte del programma. Inoltre, senza attenuarne l'impronta *deduttiva* che esso deve avere sin dal principio, credo si possa omettere la *dimostrazione* di quelle proposizioni che enunciano fatti d'intuizione immediata o perfettamente analoghi ad altri già dimostrati, senza però sostituire le dimostrazioni omesse con *spiegazioni* empiriche (da usarsi esclusivamente nel corso *preparatorio*).

Il *libro di testo* dovrebbe però contenere *tutte* le dimostrazioni; cosicchè le proposizioni, di cui l'insegnante ritenesse opportuno tralasciar la dimostrazione, conserverebbero così il carattere di *teoremi;* mentre, in un libro parzialmente mutilato, assumerebbero apparentemente quello di *postulati.*

Giova forse ch'io chiarisca il mio pensiero con qualche esempio.

Definita la perpendicolarità di retta rispetto a piano e *dimostrata* la condizione sufficiente, si può contentarsi di *enunciare* l'esistenza ed unicità di retta (piano) perpendicolare a piano (retta), il parallelismo di rette (piani) perpendicolari a piano (retta), ecc. — *Dimostrati* tutti i casi di eguaglianza dei triangoli, basterebbe *enunciare* gli analoghi di eguaglianza o simmetria dei triedri, *dimostrando* però (mediante il triedro supplementare) quello (dei tre diedri) che non ha il suo analogo per i triangoli. Delle tre condizioni cui devono soddisfare due gruppi contigui G_1 e G_2 (di numeri o di grandezze geometriche omogenee), affinchè esista uno ed un solo individuo *interposto* fra i due gruppi, le prime due (ogni G_1 è minore di ogni G_2; G_1 non ha massimo e G_2 non ha minimo) si verificano sempre facilmente, non così la terza (si può determinare un G_2 e un G_1 la cui differenza sia minore di un dato numero assoluto o di una data grandezza omogenea con quelle dei gruppi considerati); e perciò, dopo averla dimostrata in alcuni casi (ad esempio, per giustificare la definizione di somma di due numeri irrazionali, di lunghezza di una circonferenza), negli altri casi (per

---

(4) Mi sembra opportuno riassumere e completare qui alcune osservazioni contenute nella mia Relazione *Sul decreto Orlando* (Bollettino della *Mathesis*, n. 3-6, anno 1909).

La revoca di tale decreto, faticosa vittoria della nostra Associazione, mi sembra dover richiamare l'attenzione dei colleghi su queste mie avvertenze.

giustificare la definizione di prodotto di numeri irrazionali, di potenza ad esponente irrazionale, di area del cerchio, superficie laterale e volume del cilindro e del cono) si potranno verificare le prime due condizioni ed omettere di farlo per la terza (ma non di enunciarla, dicendo ciascuna volta: « si dimostra che... »).

Talvolta potrà anche esser utile *dimostrare* un teorema e far studiare invece dagli alunni la dimostrazione di qualche proposizione analoga.

In tal modo, il programma diverrebbe molto più lieve, ed il suo svolgimento più rapido consentirebbe agli alunni di comprendere meglio l'unità organica dell'intera trattazione e di distinguere più chiaramente le analogie e le diversità fra le sue parti.

9. — Sembrerà strano, ma le maggiori difficoltà didattiche io le scorgo nel corso *preparatorio* di *Geometria*. Ne additerò due, non lievi.

Mentre oggi, quale insegnante di *istituto tecnico*, vorrei che dalla *scuola tecnica* gli alunni uscissero digiuni di *Algebra* e molto meglio addestrati nell' *Aritmetica* (ed a tale desiderio ho informato le mie proposte circa il programma di *aritmetica* per il *primo* periodo [5]) — quali *esigenze* e quali *divieti* vorrei far valere per quanto concerne la *Geometria*?

I più volonterosi insegnanti di scuola tecnica antecipano senz' altro e con lo stesso metodo (deduttivo) quasi tutto il programma del primo biennio dell' istituto tecnico e fanno male (mi sia lecito dirlo, avendo fatto anch' io così), perchè nella scuola i *duplicati* di contenuto e di metodo sono dannosi (come ho già detto a proposito della scuola elementare [1]).

Ma a che cosa dovrebbe mirare sovratutto l' insegnamento geometrico *preparatorio*? io dico a sviluppare l' *intuizione geometrica*, riuscendo a far *comprendere* (ed *applicare* nel disegno) *il concetto generale di eguaglianza* col quale si inizia il corso *deduttivo* di Geometria; a *famigliarizzare* l'alunno coi *movimenti* geometrici fondamentali (*traslazione* e *rotazione assiale*, nonchè *strisciamento* della retta e della circonferenza su sè stessa, del piano su sè stesso mediante *traslazione* o *rotazione*, ecc.), perchè in essi sta il germe di molte *definizioni genetiche* e dei criteri che permettono di classificare le *mutue posizioni* di due figure; ed a *famigliarizzarlo* con tutti quei fatti geometrici che poi vedrà assunti all'ufficio di *postulati*, affinchè allora essi gli rivelino la loro importanza, ma egli li riconosca per noti ed ammessi. Insegnamento psicologicamente arduo, che in piccola parte io faccio ora (la tirannia del pro-

gramma vietandomi ogni sosta, per quanto utilissima) all'inizio del corso di Geometria, per maturare la preparazione mentale dei miei alunni, i quali viceversa da principio si dichiarano pronti a dimostrare teoremi di cui non capiscono esattamente nemmeno l'enunciato.

Ma un corso *preparatorio* di *Geometria*, fatto in modo da appagare i desiderî suesposti (e che dovrebb' essere svolto col sussidio del disegno, con gli strumenti e a mano libera, su carta bianca e quadrettata; di carte piegate e tagliate; di modelli di legno e di fil di ferro; e fors' anche di piccoli ordigni per eseguire e comporre i movimenti fondamentali), come potrebbe condurre direttamente allo scopo desiderato di predisporre la mente degli alunni ai *postulati* e alle *definizioni* del corso *deduttivo*, se l'insegnante è diverso nei due corsi ed il primo *ignora* quali postulati e definizioni adotterà il secondo?

È vano illudersi sulla possibilità di un'intesa efficace fra insegnanti di scuole diverse, quando non sempre si riesce a raggiungerla (per sincera varietà di vedute) fra insegnanti di sezioni parallele di una stessa scuola.

Un rimedio, audace, sarebbe indicato dalla risposta non dubbia alla seguente domanda: si richiede forse maggior connessione fra gli insegnamenti *aritmetico* e *geometrico* di uno stesso corso, o fra i corsi *preparatorio* e *deduttivo* di una stessa disciplina?

Nelle *nuove scuole medie*, da istituire per esperimento, non si potrebbe provare a suddividere l'insegnamento matematico fra due professori, non affidando all'uno il corso *preparatorio* e all'altro il corso *deduttivo*, ma assegnando all'uno di iniziare e condure sino al termine la *Geometria* e all' altro l' *Aritmetica* e l' *Algebra*?

Il che — si badi — non vuol dire necessariamente che ciascuno dovrebbe specializzarsi in una disciplina (e che male vi sarebbe?), potendo quest' anno Tizio insegnar *Geometria* e Caio *Aritmetica* nella I classe, e l' anno venturo istessamente nella II ma oppostamente nella I, e così via; in modo che i due insegnamenti rimarrebbero perfettamente suddivisi fra i due professori, mentre ogni alunno avrebbe sempre lo stesso professore per ciascuna disciplina. Solo così, ciascun professore potrà subordinare nel miglior modo il corso *preparatorio* al corso *deduttivo*; solo così egli sentirà intera la *responsabilità* dei risultati finali del suo insegnamento.

Nessuno, spero, vorrà far obbiezioni di ruoli o di stipendi,

perchè sarebbe troppo meschina preoccupazione mentre si stanno ricercando i mezzi per rendere più efficace uno degl' insegnamenti essenziali.

Ma, come ho preannunciato, vi è un'altra difficoltà.

Il corso inferiore della scuola media dovrà essere unicamente *preparazione* al superiore od anche dovrà avviare alle scuole *professionali di secondo grado* (sezioni professionali dell'istituto tecnico, scuole medie commerciali ed altre, agricole o industriali, che potranno sorgere) o persino dovrà essere *piccola scuola di coltura*, fine a sè stessa?

Se dovrà adempiere a tanti uffici diversi, l'ultimo prevarrà su tutti (come oggi accade nella scuola tecnica) e farà eccedere così nel numero come nello sviluppo delle varie discipline; in tal caso, se appena ci si vorrà rassegnare all' abbandono dell' *Algebra*, sembrerà invece del tutto insufficiente ai fini pratici il programma di *geometria* cui ho solo accennato a larghi tratti.

E con ragione più apparente che sostanziale; perchè io vorrei sapere ad esempio quale vantaggio — in vista dei fini pratici immediati di chi studi soltanto 3 anni dopo la scuola elementare — possa recare ad esempio il conoscere la proprietà fondamentale degli angoli alla circonferenza o il fatto che due corde di una stessa circonferenza si taglino in parti inversamente proporzionali!

Se non si riesce ad intendersi su questo, piuttosto che guastare l'armonico sviluppo della *scuola media*, considerata nella sua interezza, si trasformino quante scuole tecniche possano occorrere, rendendole idonee ad adempiere alcune il secondo ed altre il terzo ufficio.

10. — Avendo supposto *triennale* ciascuno dei corsi *preparatorio* e *deduttivo* [3], e supponendo che il nuovo ginnasio-liceo abbia ancora la durata complessiva di *otto* anni, eccoci ora al corso *complementare* di matematica intorno al quale esporrò le mie vedute, imaginando già decisa la formazione dei tre tipi di liceo *classico*, *moderno* e *scientifico*.

Per quanto concerne la *Matematica* io lo considero indiviso sino alla fine del *sesto* anno (con orario costante di 4 ore settimanali), senza curarmi di sapere dopo quanti anni si riterrà opportuno, per altre cagioni, di porre l'inizio della suddivisione. Ora, poichè non si vorrà certo protrarre tale suddivisione oltre il sesto anno (altrimenti sarebbe vano attenderne buon frutto), mi è

lecito supporre già separate nell'ultimo biennio le tre schiere di alunni e proporre per esse tre corsi *complementari* distinti di matematica.

11. — Come? Un corso complementare di *matematica* anche per il liceo *classico*? Sì, ma breve, con orario lieve, e pienamente conforme all'indole della sezione.

In esso dovrebbero venir ripresi in esame i principii così dell'aritmetica come della geometria, analizzando la formazione dei primi *concetti*, osservando la concatenazione delle *definizioni* successive, facendo intendere la necessità ma anche la relativa arbitrarietà dei *postulati*, e indugiando su poche *dimostrazioni* opportunamente scelte per mettere in luce tutto il *valore* del metodo *deduttivo* (che alcuni filosofi di professione negano leggermente, ripetendo sofismi di cui ignorano la vittoriosa confutazione) ed infondere anche il sentimento della sua *bellezza*. E dovrebb'essere inframezzato da notizie storiche relative ai principii della logica e della matematica, il cui studio organico fiorì appunto in quella civiltà greca su cui più particolarmente è richiamata anche dagli altri insegnanti l'attenzione degli scolari.

A questo corso, dall'impronta così decisamente *filosofica*, assegnerei 2 sole ore settimanali dell'*ottava classe*, reputando vantaggioso l'intervallo di un anno affinchè i giovani acquistino frattanto maggior maturità intellettuale e comprendano poi subito con quali nuovi intendimenti viene ripreso per essi lo studio della matematica.

12. — Indole del tutto diversa dovrebbe avere il corso *complementare* di matematica nel liceo *moderno*.

L'uso di alcuni concetti e di alcuni simboli, che fino a ieri erano di pertinenza esclusiva dei matematici, va diffondendosi (non si discute qui se ciò sia fatto sempre appropriatamente) in quasi tutti i rami dello scibile; cosicchè il non possedere un certo concetto o il non conoscere il significato di un certo segno bastano sovente a distogliere ad esempio biologi o economisti dalla lettura di libri scritti espressamente per loro.

È dunque opportuno che, al termine della scuola media, essi si famigliarizzino coi concetti esatti di *funzione*, *corrispondenza*, *limite*, *probabilità*, ecc., ed acquistino notizia — con brevi ma chiari cenni e con facili ma numerose applicazioni — dei primi principii della *geometria analitica* e del calcolo *differenziale* e *integrale*.

Credo che un tal corso, di carattere *informativo*, potrebbe svolgersi utilmente in un solo anno, con 3 sole ore settimanali; non saprei se assegnarlo all'*ottava* classe, per la maggior matura-

lità intellettuale degli alunni, o alla *settima* per evitare un' interruzione che disabituererebbe i giovani dall'uso di formole apprese e cui sarà ancora necessario ricorrere; per evitare i due inconvenienti, si potrebbe forse rendere *biennale* il corso, con 2 sole ore settimanali, differendo all'ultimo i concetti un po' più ardui.

13. — Il corso *complementare* di matematica per il liceo *scientifico* sarebbe senz' altro *biennale* e con almeno 4 ore settimanali.

In esso non svolgerei nulla di quanto ho proposto per le altre sezioni; non argomenti d'indole *filosofica*, perchè ad essi, con maggior maturità e più nutrita preparazione potrà volgersi più tardi il loro pensiero; e non *antecipazioni* di discipline matematiche superiori, dannose più che oziose per le ragioni che già più volte ho avuto motivo di esporre sin dai primi cenni sulla scuola elementare. Perciò, ad esempio, benchè procuri di insegnarla coscienziosamente, trovo del tutto inutile nel secondo biennio dell'istituto tecnico la *geometria descrittiva*, i cui primissimi elementi, se mai, potrebbero aggregarsi più utilmente al programma per il liceo *moderno*.

Il corso cui accenno dovrebbe invece sviluppare maggiormente alcune teorie nelle quali opportunamente si ritenne non doversi diffondere nel corso *comune* e proseguire lo studio della Matematica elementare.

Alla determinazione del programma di questo corso dovrebbero collaborare i professori dell'Università e del Liceo, stabilendo i primi quali siano le imprescindibili esigenze del loro insegnamento e formando i secondi un elenco di quelle teorie che, pur non essendo preparazione necessaria agli studi universitari, è opportuno non cadano in oblio, per i loro pregi intrinseci di risultati o di metodo.

Dividerei quindi il programma in due parti: *obbligatoria* e a *scelta* dell'insegnante.

Alla *prima* ritengo doversi assegnare senza alcun dubbio:

a) la ripresa della teoria dei numeri *irrazionali* (sino alla dimostrazione dell'esistenza ed unicità di soluzione dell' equazione esponenziale);

b) la teoria e l'uso dei logaritmi;

c) le progressioni per differenza e per quoto;

d) le equazioni ed i sistemi di grado superiore, ma riducibili al secondo;

e) la ripresa della *goniometria* e della *trigonometria piana* (di cui venne dato solo un breve cenno alla fine del corso comune [7]);

f) la trigonometria sferica;

g) le applicazioni dell'algebra e della trigonometria a problemi geometrici.

Sarebbe poi da esaminare se fra gli argomenti, che per discrezione pongo qui nella *seconda* parte, fosse opportuno trasportarne taluno nella prima:

Frazioni continue — Calcolo combinatorio e potenza di un binomio — Probabilità — Analisi indeterminata di primo grado — Trattazione algebrica dei massimi o minimi, con applicazioni geometriche.

Cenni di geometria del triangolo — Teoremi di Menelao e di Ceva, e loro applicazioni — Piani, assi e centri radicali — Altre proprietà dei poliedri — Geometria della sfera — Sezioni coniche — Trattazione sintetica di problemi geometrici di massimo o minimo.

14. — Per quanto si attiene alle *Scuole universitarie di Magistero* non potrei che ripetere quanto ebbi recentemente occasione di esporre, collaborando col prof. Gino Loria alla Relazione, approvata dal Congresso di Padova, circa la *Preparazione degli insegnanti di matematica per le scuole medie.*

Dirò piuttosto poche parole ancora a proposito della *scuola normale*, un po' negletta dai riformatori.

Io credo anzitutto (contro il parere di infatuati pedagogisti) che la scuola normale non abbia bisogno di staccarsi dal ceppo comune della scuola media più presto che non occorra separare le varie sezioni del liceo. L'indugio darà più soda coltura ai futuri maestri, consentirà loro di differire la scelta definitiva della loro carriera e renderà più agevole ad essi l'uscirne.

Io credo, quindi, per quanto concerne la matematica, che anche per i futuri maestri sia opportuno l'insegnamento ordinato nei due corsi triennali successivi, *preparatorio* e *deduttivo* [3].

Quello che occorre è soltanto di istituire anche per la scuola normale un corso *complementare* che corrisponda alla sua indole ed al suo fine, e che perciò sia, in adatte proporzioni, nè più nè meno che una *scuola di magistero*. In essa (*annuale* o *biennale*, secondo la durata complessiva degli studi, ed io preferirei biennale) l'insegnante dovrebbe prendere in esame il programma della scuola elementare, commentare e raffrontare buoni o cattivi libri di testo, e dare tutte le norme che stimerà più opportune a ren-

dere efficace l'insegnamento della matematica nella scuola elementare, facendo poi che gli alunni tengano lezioni di saggio, preparino gruppi di esercizi e problemi ben graduati, riferiscano sui pregi e difetti di libri di testo non prima esaminati in iscuola, ecc.

Occorre soggiungere che questo compito dev' essere interamente affidato all'insegnante di matematica? Pare di sì, a quanto ne dice la prof.[a] Bisson-Minio nella ricordata sua Relazione: « È bene per tutti i conti che le norme didattiche siano date dal professore di matematica, perchè non si può indicare il metodo migliore di impartire una nozione.... se non si conoscono da tutti i punti di vista le varie questioni. Ciò non si può pretendere dall' insegnante di pedagogia.... » (pag. 12, linea 3 dal basso — pag. 13, linea 3).

Sarò ben lieto se queste mie osservazioni e proposte varranno a stimolare discussioni che preludano a meditate riforme, allo scopo di meglio adattare l'insegnamento della matematica ai fini di ciascuna scuola, così da renderlo più proficuo e più bene accetto.

Genova, 21 marzo 1910.